УДК 519.6:001.5

Левкин Д.А.
Харьковский национальный технический университет
сельского хозяйства имени Петра Василенко

АДЕКВАТНОСТЬ РАСЧЕТНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ЛАЗЕРНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ЭМБРИОН

В статье доказана адекватность расчетной математической модели, описывающей процесс действия лазерного луча на эмбрион. Для этого автором определены условия корректности краевой задачи системы дифференциальных уравнений теплопроводности, лежащей в основе расчетной математической модели. Отметим, что из-за сложной формы и трехслойной внутренней структуры эмбриона невозможно гарантировать наличие и единственность решения краевой задачи. Для оптимизации параметров теплового поля необходима корректная постановка краевой задачи процесса действия лазерного луча на эмбрион. Выполнение этого требования позволит повысить точность и быстродействие реализации прикладных оптимизационных математических моделей процесса лазерного воздействия на эмбрион, а также снизить энергозатраты и повысить выживаемость клеток при трансплантации.

Ключевые слова: *адекватность, расчетная математическая модель, эмбрион, корректность, оптимизация.*

Постановка проблемы. При расчете технических параметров процесса воздействия физических полей на многослойные биоматериалы актуальным является вопрос обеспечения биотехнологического процесса воздействия с минимальными потерями дорогостоящего биоматериала. На практике часто возникают задачи, когда необходимо провести оптимизацию технических параметров процесса воздействия на многослойные, нелинейные, неоднородные микробиологические материалы сложной пространственной формы. В качестве примера многослойного микробиологического материала рассмотрим эмбрион под воздействием сканируемых источников лазерного облучения. Сложная пространственная форма микробиологического объекта и его трехслойная, нелинейная, неоднородная внутренняя структура приводит к тому, что для оптимизации параметров целевой функции (теплового поля) эмбриона необходим многократный перебор ее значений. Это возможно благодаря многократной реализации расчетной математической модели процесса лазерного воздействия на эмбрион. Некоторые вопросы оптимизации многослойных биологических систем затронуты в работах автора [1; 2].

Как показано в работе [3], в основе расчетной математической модели процесса действия лазерного луча на эмбрион лежит краевая задача пяти дифференциальных уравнений теплопроводности в сферической системе координат:

$$\begin{cases} \rho_1 c_1 \dfrac{\partial T_1}{\partial t} - \lambda_1 \left(\dfrac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r_1} \dfrac{\partial T_1}{\partial r} \right) + q_1 = 0 \quad при \quad r \in [0; r_1],\ t \in [0; t_1]; \\ \rho_2 c_2 \dfrac{\partial T_2}{\partial t} - \lambda_2 \left(\dfrac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r_2} \dfrac{\partial T_2}{\partial r} \right) + q_2 = 0 \quad при \quad r \in [r_1; r_2],\ t \in [t_1; t_2]; \\ \rho_3 c_3 \dfrac{\partial T_3}{\partial t} - \lambda_3 \left(\dfrac{\partial^2 T_3}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r_3} \dfrac{\partial T_3}{\partial r} \right) + q_3 = 0 \quad при \quad r \in [r_2; r_3],\ t \in [t_2; t_3]; \\ \rho_4 c_4 \dfrac{\partial T_4}{\partial t} - \lambda_4 \left(\dfrac{\partial^2 T_4}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r_4} \dfrac{\partial T_4}{\partial r} \right) + q_4 = 0 \quad при \quad r \in [r_3; r_4],\ t \in [t_3; t_4]; \\ \rho_5 c_5 \dfrac{\partial T_5}{\partial t} - \lambda_5 \left(\dfrac{\partial^2 T_5}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r_5} \dfrac{\partial T_5}{\partial r} \right) + q_5 = 0 \quad при \quad r \in [r_4; r_5],\ t \in [t_4; t_5], \end{cases} \tag{1}$$

где ρ_e – коэффициент плотности e-го слоя эмбриона; c_e – коэффициент теплоемкости; $T_e = T_e(r,t)$ – температурное поле эмбриона; r – пространственная переменная; t – длительность действия лазерного луча; r_e – расстояние от центра источника теплового воздействия в виде пятна до точки в e-м слое эмбриона, в которой определяется значение температурного поля; λ_e – коэффициент теплопроводности e-го слоя; q_e – удельная плотность мощности тепловых нагрузок в эмбрионе.

Для учета начала и конца действия лазерного луча на эмбрион введены граничные условия Дирихле:

$$\begin{cases} T(r_0, t_0) = T_н; \\ T(r_5, t_5) = T_к, \end{cases} \tag{2}$$

где $T_н$ – температура эмбриона в начале действия лазерного луча; $T_к$ – температура эмбриона в конце действия лазерного луча.

Граничное условие теплового обмена в зоне пеллюцида и окружающей среде имеет вид:

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r}(0,t) = qS, \quad 0 \le t \le h\,, \qquad (3)$$

где q – удельный тепловой поток; S – диаметр источника теплового воздействия, т. е. пятна; h – длительность действия источника.

Расчетная математическая модель приведена без числовых значений плотности, коэффициентов теплоемкости и теплопроводности, а также других технических параметров, характерных для биотехнологического процесса лазерного воздействия на эмбрион. Значения вышеуказанных параметров стоит учитывать при реализации математической модели после того, как будет доказано наличие и единственность решения краевой задачи, лежащей в ее основе.

Заметим, что в силу сложной пространственной формы и трехслойной структуры эмбриона невозможно гарантировать корректность данной краевой задачи. Для осуществления оптимизации технических параметров лазера, экономии тепловых и энергоресурсов, а также контроля послойного распределения температурных полей в эмбрионе необходимо проверить наличие и единственность решения рассмотренной краевой задачи.

Анализ последних исследований и публикаций. Актуальность вопроса исследования отражена в работах ведущих зарубежных и отечественных ученых [4–9]. Несмотря на то, что в работах [4–7] исследованы вопросы оптимизации не биологических, а электротехнических, экологических и других систем, важным в них является подход к расчету и оптимизации параметров целевой функции. Результаты работ [8; 9] посвящены расчету и оптимизации конкретных технических параметров процесса действия лазерного луча на эмбрион. Однако в работах [8; 9] не учитывается трехслойная структура эмбриона, и микробиологический объект принимается как однородное сферическое тело. Это приводит к получению усредненной температуры лазерного воздействия на эмбрион, погрешностям оптимизируемых технических параметров процесса воздействия, а значит, к излишним потерям клеток.

Постановка задания. Целью работы является обоснование адекватности расчетной математической модели процесса действия лазерного луча на эмбрион.

Изложение основного материала исследования. Проверим корректность (существование и единственность решения) краевой задачи для системы пяти дифференциальных уравнений теплопроводности в сферической системе координат. Для этого воспользуемся результатами работы [10].

Перепишем дифференциальное уравнение теплопроводности из системы (1) в следующем виде:

$$P_0(r, D_t, D_r)\,T(r,t) + aP_1(r, D_t, D_r)\,T(r,t) = f(r,t)\,, \quad (4)$$

где $a = -\dfrac{\lambda}{\rho c}$.

Покажем, что краевая задача для возмущенного дифференциального уравнения (4) будет корректна в пространстве $S[a,b)$, т. е. в пространстве бесконечно дифференцируемых функций на сегменте $[a,b)$ вместе со всеми производными, равными нулю в точке a.

Для этого, согласно результатам работ [10–12], рассмотрим символ возмущенного дифференциального уравнения (4):

$$P(r,\tau,\eta) = i\tau + a\eta^2 - \frac{2ai\eta}{r}\,. \qquad (5)$$

Представим символ (5) в виде суммы:

$$P(r,\tau,\eta) = P_0(r,\tau,\eta) + P_1(r,\tau,\eta)\,, \qquad (6)$$

где $P_0(r,\tau,\eta) = i\tau + a\eta^2$;

$$P_1(r,\tau,\eta) = -\frac{2ai\eta}{r}\,.$$

Проверим, будет ли $P_0(r,\tau,\eta)$ экспоненциально-корректным полиномом постоянной силы, а $P_1(r,\tau,\eta)$ – подчиненным символом дифференциального оператора. Для этого воспользуемся определением экспоненциально-корректного полинома и условием постоянства силы, рассмотренными в работах [10; 12].

Полином $P(\tau,\eta)$ называется экспоненциально-корректным, если для любого $\nu > 0$ найдется $p(\nu)$: $P(\tau, \eta + i\omega) \ne 0$, $\operatorname{Im}\tau < p(\nu)$, $|\omega_j| < \nu$ при $j = 1,\ldots,n-1$.

Символ $P(x,\tau,\eta) = \sum_j a_j(x)\tau^{j_0}\eta_1^{j_1}\ldots\eta_{n-1}^{j_{n-1}}$ удовлетворяет условию постоянства силы, если найдутся $A > 0, \gamma_0$: $|P(x',\tau,\eta) / P(x'',\tau,\eta)| < A$ для любых $x', x'' \in R^n$, $\operatorname{Im}\tau < \gamma_0$.

Так, в символе оператора $P_0(r,\tau,\eta) = i\tau + a\eta^2$, $\tau_1 = \operatorname{Im}\tau = a\left((\operatorname{Re}\tau)^2 - \omega^2\right)$ и при $\operatorname{Im}\tau < 0$ полином $P_0(r,\tau,\eta)$ является экспоненциально-корректным.

Заметим, что полином $P_0(r,\tau,\eta)$ не зависит от r, а значит автоматически выполнено условие постоянства силы.

Дифференциальный оператор

$$P_1(r,D)T = -\frac{2a}{r}\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}$$

является подчинённым оператору

$$P_0(r,D)T = \frac{\partial T}{\partial t} - a\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}.$$

Покажем это: действительно,

$$\frac{P_1(r,\tau,\eta)}{P_0(r,\tau,\eta)} = \frac{-\dfrac{2ai\eta}{r}}{i\tau + a\eta^2} \to 0$$

равномерно при $\operatorname{Im}\tau \to -\infty$, $r > \delta$. Аналогично, для любых α, β $\left(D_\eta^\alpha D_r^\beta P_1(r,\eta)\right) / P_0(r,\eta) \to 0$ при $\operatorname{Im}\tau \to -\infty$ равномерно по переменным $r = (t, y)$, $(\operatorname{Re}\tau, \eta) \in R^{n-1}$ при $r > \delta$.

Разрешающая функция для краевой задачи уравнения теплопроводности в многослойной среде выглядит следующим образом:

$$Q(s,t) = \begin{cases} \exp(-t)\,k_1 s^2 / \Delta(s) & при \quad t \in [0;t_1]; \\ \exp(t_1 - t)\,k_2 s^2 / \Delta(s) & при \quad t \in [t_1;t_2]; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \\ \exp\left((t_{n-1} - t)k_n s^2 - \ldots - t_1 k_1 s^2\right) / \Delta(s) & при \quad t \in [t_{n-1};T], \end{cases} \qquad (7)$$

где $\Delta(s) = B + C\exp\left(-\sum_{j=1}^{n} k_j s^2 \Delta t_j\right)$.

Легко видеть, что функция $|Q(s,t)| \le 1$ и удовлетворяет условию $|Q(s,t)| \le C\exp\left(-bp(t)|s|^2\right)$, где $p(t) = \min_{1\le k\le n} |\,t - t_k|$, т.е. данная задача является параболичной. Значит [10] данная краевая задача является корректной в пространстве Соболева-Слободецкого (обобщенных функций) H_e^s и в пространстве S и ее можно возмущать подчиненными дифференциальными операторами.

Таким образом, используя результаты работ [10; 12], доказали корректность (существование и единственность решения) краевой задачи, лежащей в основе расчетной математической модели процесса теплового воздействия на многослойный (трехслойный) микробиологический объект (эмбрион) в пространстве $S[a,b)$ и тем самым доказали ее адекватность.

Выводы. В работе рассмотрена расчетная математическая модель процесса действия лазерного луча на эмбрион. Как показано автором, в основе расчетной математической модели лежит краевая задача системы пяти многомерных, нестационарных и неоднородных дифференциальных уравнений теплопроводности в сферической системе координат. В связи со сложной пространственной формой, трехслойной структурой эмбриона и особенностями процесса лазерного воздействия невозможно гарантировать наличие единственного решения данной краевой задачи.

В статье автором доказаны существование и единственность решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений теплопроводности, описывающей процесс действия лазерного луча на эмбрион. Полученный результат позволяет гарантировать адекватность расчетных и прикладных оптимизационных математических моделей процесса лазерного воздействия на эмбрион, а значит, уменьшить затраты тепловых и энергоресурсов, а также повысить выживаемость зародышей при трансплантации.

Список литературы:

1. Левкин А., Левкин Д. Построение оптимизационной задачи тепловых процессов при лазерном делении эмбриона. MOTROL. Commission of Motorization and Energetics in Agriculture. Lublin; Rzeszov, 2013. Vol. 15. № 7. P. 67–71.

2. Мегель Ю., Путятин В., Левкин Д., Левкин А. Математическое моделирование и оптимизация параметров действия лазерного луча на многослойные биоматериалы. Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія «Механіко-технологічні системи та комплекси». Х.: НТУ «ХПІ», 2017. № 20 (1242). С. 60–64.

3. Левкин Д. Математическая модель процесса действия лазерного луча на многослойный микробиологический объект. Технічний сервіс агропромислового, лісового та транспортного комплексів. Харків, 2018. № 11. С. 113–118.

4. Стоян Ю., Путятин В. Размещение источников физических полей. К.: Наук. думка, 1981. С. 59–87.

5. Стоян Ю., Путятин В. Оптимизация технических систем с источниками физических полей. К.: Наук. думка, 1988. С. 44–48.

6. Чубаров Е. Управление системами с подвижными источниками воздействия. М.: Энергоатомиздат, 1985. 288 с.

7. Марчук Г. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 320 с.

8. Douglas-Hamilton D., Conia J. Thermal effects in laser-assisted pre-embryo zona drilling. Journal of Biomedical Optics. 2001. Vol. 6. Issue 2. P. 205. DOI: 10. 1117/1.1353796.

9. Rink K., Delacretaz G., Salathe R. Non-contact microdrilling of mouse zona pellucida with an objective-delivered 1.48 um diode laser. Lasers in Surgery and Medicine. 1996. Vol. 18. P. 52–62.

10. Макаров А., Левкин Д. Многоточечная краевая задача для псевдодифференциальных уравнений в полислое. Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія «Математика, прикладна математика і механіка». Х., 2014. Вып. 69. № 1120. С. 64–74.

11. Волевич Л., Гиндикин С. Обобщенные функции и уравнения в свертках. М.: Наука, 1994. 336 с.

12. Макаров А., Левкин Д. Задача Коши для экспоненциально-корректных псевдодифференциальных операторов. Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія «Математика, прикладна математика і механіка». Х., 2012. Вып. 64. № 990. С. 42–47.

АДЕКВАТНІСТЬ РОЗРАХУНКОВОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПРОЦЕСА ЛАЗЕРНОЇ ДІЇ НА ЕМБРІОН

У статті доведена адекватність розрахункової математичної моделі, що описує процес дії лазерного променя на ембріон. Для цього автором визначені умови коректності крайової задачі системи диференціальних рівнянь теплопровідності, що лежить в основі розрахункової математичної моделі. Зазначимо, що через складну форму та тришарову внутрішню структуру ембріона неможливо гарантувати наявність та єдиність розв'язку крайової задачі. Для здійснення оптимізації параметрів теплового поля необхідна коректна постановка крайової задачі процеса дії лазерного променя на ембріон. Виконання цієї умови дозволить підвищити точність та швидкість реалізації прикладних оптимізаційних математичних моделей процеса лазерної дії на ембріон, а також зменшити енерговитрати та підвищити виживання клітин під час трансплантації.

Ключові слова: *адекватність, розрахункова математична модель, ембріон, коректність, оптимізація.*

THE ADEQUACY OF CALCULATED MATHEMATICAL MODEL OF AN ACTION PROCESS OF A LASER BEAM ON AN EMBRYO

In the article we prove the adequacy of calculated mathematical model which describes an action process of a laser beam on an embryo. For this purpose conditions of correctness of boundary-value problem of a system of differential equations of thermal conductivity which is fundamental for calculated mathematical model were determined by the author. It should be noticed that it is impossible to assure existence and uniqueness of a solution of boundary-value problem because of sophisticated form and three-layer internal structure of an embryo. In this connection, correct setting of boundary-value problem of an action process of a laser beam on an embryo is needed for implementation of optimization of parameters of thermic field. Implementation of this requirement will allow increasing exactness and operating speed of realization of applied optimized mathematical models of an action process of a laser beam on an embryo, decreasing energy consumption and increasing survival of cells during transplantation.

Key words: *adequacy, calculated mathematical model, embryo, correctness, optimization.*